有限要素法による動的解析

東京大学 森田直樹

2018 年 5 月 15 日

1 動的解析

質点系の振動方程式

$$m\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{v} + k\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{1}$$

を参考にして、構造解析で解くべき振動方程式 (2) にも、減衰行列 $\boldsymbol{C}$ を導入する。減衰行列 $\boldsymbol{C}$ は、何らかのモデル化を施し、実際の減衰現象を模擬するように決定される。

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f} \tag{2}$$

本章では、減衰項のモデル化として、実験的に数値を定めることのできる Rayleigh 減衰

$$\boldsymbol{C} = R_m\boldsymbol{M} + R_k\boldsymbol{K} \tag{3}$$

を導入する。

式 (4) に、時刻 $t + \Delta t$ において離散化された運動方程式を示す。

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}_{t+\Delta t} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_{t+\Delta t} + \boldsymbol{q}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{f}_{t+\Delta t} \tag{4}$$

ここで、$\boldsymbol{M}$ は質量行列、$\boldsymbol{C}$ は減衰行列、$\boldsymbol{q}_{t+\Delta t}$ は内力ベクトル、$\boldsymbol{f}_{t+\Delta t}$ は外力ベクトル、$\boldsymbol{a}_{t+\Delta t}$ は加速度ベクトル、$\boldsymbol{v}_{t+\Delta t}$ は速度ベクトルである。ここで式 (4) が線形問題の範囲であれば、内力ベクトル $\boldsymbol{q}_{t+\Delta t}$ は、剛性マトリクス $\boldsymbol{K}$ を用いて

$$\boldsymbol{q}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} \tag{5}$$

と表せられる。

$\boldsymbol{q}_{t+\Delta t}$ は変位 $\boldsymbol{u}$ に関する非線形の関数であるため、内力ベクトルの線形化を行って得られる式 (6) に対し、Newton-Raphson 反復の反復計算 ($i = 1, 2, 3, \cdots$) を適用する。

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}^{(i)}_{t+\Delta t} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}^{(i)}_{t+\Delta t} + \boldsymbol{K}_{t+\Delta t}\Delta\boldsymbol{u}^{(i)} = \boldsymbol{f}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{q}^{(i)}_{t+\Delta t} \tag{6}$$

ここで、Newton-Raphson 反復ごとの変位、速度、加速度の修正量は、式 (7)、式 (8)、式 (9) で表される。

$$\boldsymbol{u}^{(i)}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{u}^{(i-1)}_{t+\Delta t} + \Delta\boldsymbol{u}^{(i)} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{v}^{(i)}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{v}^{(i-1)}_{t+\Delta t} + \Delta\boldsymbol{v}^{(i)} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{a}^{(i)}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{a}^{(i-1)}_{t+\Delta t} + \Delta\boldsymbol{a}^{(i)} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{q}^{(i)}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{u}^{(i)}_{t+\Delta t} \tag{10}$$

また、上付き添字 (i) は i 回目の Newton-Raphson 反復であることを示し、(0) の場合は、以下のように時刻 t の値を用いる。

$$\boldsymbol{u}_{t+\Delta t}^{(0)} = \boldsymbol{u}_t \tag{11}$$
$$\boldsymbol{v}_{t+\Delta t}^{(0)} = \boldsymbol{v}_t \tag{12}$$
$$\boldsymbol{a}_{t+\Delta t}^{(0)} = \boldsymbol{a}_t \tag{13}$$
$$\boldsymbol{q}_{t+\Delta t}^{(0)} = \boldsymbol{q}_t \tag{14}$$

ここからは簡単のため、線形問題の運動方程式

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}_{t+\Delta t} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_{t+\Delta t} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{f}_{t+\Delta t} \tag{15}$$

について議論する。時刻 t から時刻 $t+\Delta t$ における時刻変化に関し、変位 $\boldsymbol{u}_{t+\Delta t}$、速度 $\boldsymbol{v}_{t+\Delta t}$ をそれぞれ時刻 t についてテイラー展開することを考え、式 (16)、式 (17) が得られる。

$$\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{u}_t + \Delta t \boldsymbol{v}_t + \frac{\Delta t^2}{2}\boldsymbol{a}_t + \frac{\Delta t^3}{6}\dddot{\boldsymbol{u}}_t \tag{16}$$
$$\boldsymbol{v}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{v}_t + \Delta t \boldsymbol{a}_t + \frac{\Delta t^2}{2}\dddot{\boldsymbol{u}}_t \tag{17}$$

ここで、式 (16) において $\beta = \frac{\Delta t^3}{6}$、式 (17) において $\gamma = \frac{\Delta t^2}{2}$ を定義し置き直すと、式 (18)、式 (19) が得られる。

$$\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{u}_t + \Delta t \boldsymbol{v}_t + \frac{\Delta t^2}{2}\boldsymbol{a}_t + \beta \Delta t^3 \dddot{\boldsymbol{u}}_t \tag{18}$$
$$\boldsymbol{v}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{v}_t + \Delta t \boldsymbol{a}_t + \gamma \Delta t^2 \dddot{\boldsymbol{u}}_t \tag{19}$$

ここで、加速度の変化を線形と仮定すると、式 (20) が得られる。

$$\dddot{\boldsymbol{u}}_t = \frac{\boldsymbol{a}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{a}_t}{\Delta t} \tag{20}$$

式 (20) を、式 (18)、式 (19) にそれぞれ代入すると、式 (21)、式 (22) が得られる。

$$\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{u}_t + \Delta t \boldsymbol{v}_t + \frac{\Delta t^2}{2}\boldsymbol{a}_t + \beta \Delta t^3 \frac{\boldsymbol{a}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{a}_t}{\Delta t} \tag{21}$$
$$\boldsymbol{v}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{v}_t + \Delta t \boldsymbol{a}_t + \gamma \Delta t^2 \frac{\boldsymbol{a}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{a}_t}{\Delta t} \tag{22}$$

これを整理して、式 (23)、式 (24) が得られる。

$$\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{u}_t + \Delta t \boldsymbol{v}_t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \boldsymbol{a}_t + \beta \Delta t^2 \boldsymbol{a}_{t+\Delta t} \tag{23}$$
$$\boldsymbol{v}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{v}_t + (1-\gamma)\Delta t \boldsymbol{a}_t + \gamma \Delta t \boldsymbol{a}_{t+\Delta t} \tag{24}$$

さらに、式 (23) を $\boldsymbol{a}_{t+\Delta t}$ について整理すれば、式 (25) が得られる。

$$\boldsymbol{a}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2}(\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{u}_t) - \frac{1}{\beta \Delta t}\boldsymbol{v}_t - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\boldsymbol{a}_t \tag{25}$$

つぎに、式 (25) を式 (24) に代入して、式 (26) を得る。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{t+\Delta t} &= \boldsymbol{v}_t + (1-\gamma)\Delta t\boldsymbol{a}_t \\ &+ \gamma\Delta t\left\{\frac{1}{\beta\Delta t^2}(\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{u}_t) - \frac{1}{\beta\Delta t}v_t - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\boldsymbol{a}_t\right\} \\ &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{u}_{t-\Delta t}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\boldsymbol{v}_{t-t\Delta t} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\boldsymbol{a}v_{t-\Delta t}\end{aligned} \tag{26}$$

式 (25)、式 (26) を、式 (4) に代入して、式 (27) を得る。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{M}\left\{\frac{1}{\beta\Delta t^2}(\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{u}_t) - \frac{1}{\beta\Delta t}\boldsymbol{v}_t - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\boldsymbol{a}_t\right\} \\ &+\boldsymbol{C}\left\{\frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{u}_{t-\Delta t}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\boldsymbol{v}_{t-t\Delta t} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\boldsymbol{a}_{t-\Delta t}\right\} \\ &+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{f}_{t+\Delta t}\end{aligned} \tag{27}$$

式 (26) を $\boldsymbol{u}_{t+\Delta t}$ について整理して、式 (28) を得る。

$$\begin{aligned}(\frac{1}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K})\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} &= \boldsymbol{f}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{M}\left(-\frac{1}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{u}_t - \frac{1}{\beta\Delta t}\boldsymbol{v}_t - \frac{1-2\beta}{2\beta}\boldsymbol{a}_t\right) \\ &-\boldsymbol{C}\left\{-\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\boldsymbol{u}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\boldsymbol{v}_t + \Delta t\frac{2\beta-\gamma}{2\beta}\boldsymbol{a}_t\right\}\end{aligned} \tag{28}$$

ここで、Rayleigh 減衰 $\boldsymbol{C} = R_m\boldsymbol{M} + R_k\boldsymbol{K}$ を導入して、式 (29) を得る。

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(R_m\boldsymbol{M} + R_k\boldsymbol{K}) + \boldsymbol{K}\right\}\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} = \\ &\boldsymbol{f}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{M}\left(-\frac{1}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{u}_t - \frac{1}{\beta\Delta t}\boldsymbol{v}_t - \frac{1-2\beta}{2\beta}\boldsymbol{a}_t\right) \\ &-(R_m\boldsymbol{M} + R_k\boldsymbol{K})\left\{-\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\boldsymbol{u}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\boldsymbol{v}_t + \Delta t\frac{2\beta-\gamma}{2\beta}\boldsymbol{a}_t\right\}\end{aligned} \tag{29}$$

式 (29) を $\boldsymbol{u}_{t+\Delta t}$ について整理して、式 (30) を得る。

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}R_m\right)\boldsymbol{M} + \left(\frac{\gamma}{\beta\Delta t}R_k + 1\right)\boldsymbol{K}\right\}\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{f}_{t+\Delta t} \\ &+\boldsymbol{M}\left[\left\{\frac{1}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{u}_t + \frac{1}{\beta\Delta t}\boldsymbol{v}_t + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\boldsymbol{a}_t\right\}\right. \\ &\left.+R_m\left\{\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\boldsymbol{u}_t + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\boldsymbol{v}_t + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\boldsymbol{a}_t\right\}\right] \\ &+R_k\boldsymbol{K}\left\{\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\boldsymbol{u}_t + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\boldsymbol{v}_t + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\boldsymbol{a}_t\right\}\end{aligned} \tag{30}$$

ここで、一時変数 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3、c_1、c_2 を定義して、式 (42) を得る。

$$a_1 = \frac{1}{2\beta} - 1 \tag{31}$$
$$a_2 = \frac{1}{\beta\Delta t} \tag{32}$$
$$a_3 = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \tag{33}$$
$$b_1 = \Delta t(\frac{\gamma}{2\beta} - 1) \tag{34}$$
$$b_2 = \frac{\gamma}{\beta} - 1 \tag{35}$$
$$b_3 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \tag{36}$$
$$c_1 = 1 + R_k b_3 \tag{37}$$
$$c_2 = a_3 + R_k b_3 \tag{38}$$

$$\begin{multlined}(c_2\boldsymbol{M} + c_1\boldsymbol{K})\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{f}_{t+\Delta t} \\ +\boldsymbol{M}\{(a_3\boldsymbol{u}_t + a_2\boldsymbol{v}_t + a_1\boldsymbol{a}_t) + R_m(b_3\boldsymbol{u}_t + b_2\boldsymbol{v}_t + b_1\boldsymbol{a}_t)\} \\ +R_k\boldsymbol{K}(b_3\boldsymbol{u}_t + b_2\boldsymbol{v}_t + b_1\boldsymbol{a}_t)\end{multlined} \tag{39}$$

ここで一時ベクトル $\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{x}_2$ を以下のように置き、式 (42) を得る。

$$\boldsymbol{x}_1 = a_3\boldsymbol{u}_t + a_2\boldsymbol{v}_t + a_1\boldsymbol{a}_t \tag{40}$$
$$\boldsymbol{x}_2 = b_3\boldsymbol{u}_t + b_2\boldsymbol{v}_t + b_1\boldsymbol{a}_t \tag{41}$$

$$(c_2\boldsymbol{M} + c_1\boldsymbol{K})\boldsymbol{u}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{f}_{t+\Delta t} + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_1 + R_m\boldsymbol{x}_2) + R_k\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_2 \tag{42}$$

以上より、式 (42) を用いて解ベクトルとなる変位 $\boldsymbol{u}_{t+\Delta t}$ が得られれば、式 (25)、式 (26) の関係を用いて、速度 $\boldsymbol{v}_{t+\Delta t}$、加速度 $\boldsymbol{a}_{t+\Delta t}$ を算出できる。

この導出過程を、線形化した運動方程式 (6) に対し同様に適用すれば、式 (43) の関係が得られる。内力ベクトル $\boldsymbol{q}$ が変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ の関数であるから、式 (43) は非線形方程式であるため、求解には Newton-Raphson 法等の非線形方程式向けの解法を用いる。

$$(c_2\boldsymbol{M} + c_1\boldsymbol{K}^{(i-1)}_{t+\Delta t})\Delta\boldsymbol{u}^{(i)} = \boldsymbol{f}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{q}^{(i-1)}_{t+\Delta t} + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_1 + R_m\boldsymbol{x}_2) + R_k\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_2 \tag{43}$$

従って、式 (44) に示す残差ベクトル $\boldsymbol{\psi}$ が、$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{0}$ となるような平衡解を求める問題に帰着する。

$$\boldsymbol{\psi} = (c_2\boldsymbol{M} + c_1\boldsymbol{K}^{(i-1)}_{t+\Delta t})\Delta\boldsymbol{u}^{(i)} + \boldsymbol{q}^{(i-1)}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{f}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_1 + R_m\boldsymbol{x}_2) - R_k\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_2 \tag{44}$$