

# 有限要素法による非定常非線形熱伝導解析

東京大学 森田直樹

2018年5月11日

## 1 はじめに

本資料は、有限要素法による非定常非線形熱伝導解析についてまとめたものである。本資料の作成にあたっては、参考文献 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] に依った。

## 2 支配方程式

フーリエの法則は、式 (1) で表される。概略図を図 1 に示す。

$$\phi = -\lambda \nabla \theta \quad (1)$$

ここで、 $\phi$  は熱流束 [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]、 $\theta$  は温度 [ $\text{K}$ ]、 $\lambda$  は熱伝導率 [ $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ] である。

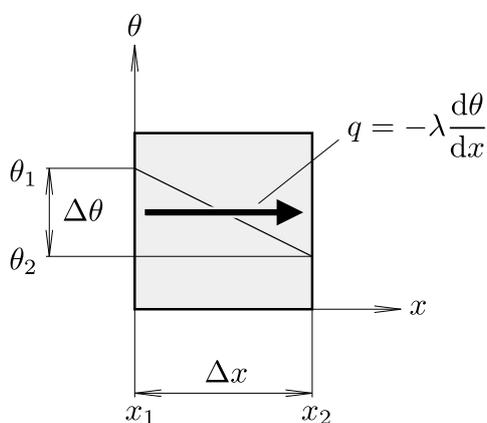


図1 Schematic representation of Fourier's law

熱量保存則は、式 (2) で表される。

$$\rho c \dot{\theta} = -\nabla \cdot \phi + f \quad (2)$$

ここで、 $\rho$  は密度 [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]、 $c$  は比熱 [ $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ]、 $\dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$  は温度の時間変化率、 $f$  は発熱量 [ $\text{W}/\text{m}^3$ ] である。

式 (1) を式 (2) に代入すると、支配方程式 (3) が得られる。

$$\rho c \dot{\theta} = \nabla \cdot (\lambda \nabla \theta) + f \quad (3)$$

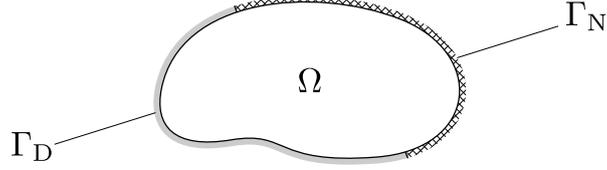


図2 Schematic representation of the physical domain  $\Omega$

次に、領域  $\Omega$  を考え、その境界を  $\Gamma$  とする。このとき、Neumann 境界が定義された境界  $\Gamma_N$  と Dirichlet 境界が定義された境界  $\Gamma_D$  を、式 (4)、式 (5) のように定義する。

$$\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D \quad (4)$$

$$\Gamma_N \setminus \Gamma_D = \emptyset \quad (5)$$

ここで、Neumann 境界  $\Gamma_N$  において熱流入量  $q$  が、Dirichlet 境界  $\Gamma_D$  において温度  $\theta$  が、それぞれ式 (9)、式 (7) のように定義されるとする。

$$q = \lambda \nabla \theta \text{ on } \Gamma_N \quad (6)$$

$$\theta = \theta_0 \text{ on } \Gamma_D \quad (7)$$

### 3 有限要素離散化

ここまでに得られた、支配方程式 (3) について、有限要素離散化を考える。式 (3) に左から  $\delta\theta$  を乗じ、領域  $\Omega$  で積分すると、式 (8) を得る。

$$\int_{\Omega} \delta\theta \rho c \dot{\theta} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta\theta \{ \nabla \cdot (\lambda \nabla \theta) + f \} \, d\Omega \quad (8)$$

式 (8) を展開して、式 (9) を得る。

$$\int_{\Omega} \delta\theta \rho c \dot{\theta} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta\theta \nabla \cdot (\lambda \nabla \theta) \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta\theta f \, d\Omega \quad (9)$$

ここで、ナブラの積の法則  $\nabla \cdot (\phi A) = (\nabla \phi) \cdot A + \phi \nabla \cdot A$  において、 $A = \alpha \nabla \psi$  とすると、式 (10) を得る。

$$\nabla \cdot (\phi \alpha \nabla \psi) = (\nabla \phi) \cdot \alpha \nabla \psi + \phi \nabla \cdot \alpha \nabla \psi \quad (10)$$

式 (10) を移項して、式 (11) を得る。

$$\phi \nabla \cdot \alpha \nabla \psi = \nabla \cdot (\phi \alpha \nabla \psi) - (\nabla \phi) \cdot \alpha \nabla \psi \quad (11)$$

式 (11) の関係から、式 (9) を変形し、式 (12) を得る。

$$\int_{\Omega} \delta\theta \rho c \dot{\theta} \, d\Omega = \int_{\Omega} \{ \nabla \cdot (\delta\theta \lambda \nabla \theta) - (\nabla \delta\theta) \cdot \lambda \nabla \theta \} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta\theta f \, d\Omega \quad (12)$$

式 (12) を展開し、式 (13) を得る。

$$\int_{\Omega} \delta\theta \rho c \dot{\theta} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \delta\theta) \cdot \lambda \nabla \theta \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\delta\theta \lambda \nabla \theta) \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta\theta f \, d\Omega \quad (13)$$

ここで、ガウスの定理を、式 (14) に示す。

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\phi \nabla \psi) \, d\Gamma \quad (14)$$

式 (14) により、式 (13) の右辺第一項を変形し、式 (15) を得る。

$$\int_{\Omega} \delta\theta \, \rho c \, \dot{\theta} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \delta\theta \cdot \lambda \nabla \theta \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\delta\theta \, \lambda \nabla \theta) \, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta\theta \, f \, d\Omega \quad (15)$$

ここで、式 (15) の右辺第一項は、式 (16) のように変形できる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\delta\theta \, \lambda \nabla \theta) \, d\Gamma &= \int_{\Gamma} \delta\theta \, \lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} \, d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \delta\theta \, q \, d\Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

式 (15) と式 (16) より、式 (17) が得られる。

$$\int_{\Omega} \delta\theta \, \rho c \, \dot{\theta} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \delta\theta \cdot \lambda \nabla \theta \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta\theta \, f \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta\theta \, q \, d\Gamma \quad (17)$$

ここで、領域  $\Omega$  を、式 (18) のように有限要素近似することを考える。

$$\Omega \simeq \Omega^{\text{FEM}} = \bigcup_e^{n_{\text{elem}}} \Omega^{(e)} \quad (18)$$

式 (18) より、領域  $\Omega$  の領域積分と境界積分は、それぞれで式 (19)、式 (20) 表される。

$$\int_{\Omega} d\Omega \simeq \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} d\Omega^{(e)} \quad (19)$$

$$\int_{\Gamma} d\Gamma \simeq \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Gamma^{(e)}} d\Gamma^{(e)} \quad (20)$$

次に、ある要素  $e$  の領域内部の物理量  $\phi^{(e)}$  は、要素内の局所座標系  $\boldsymbol{\xi}$  と補関数  $\mathbf{N}$ 、節点物理量ベクトル  $\boldsymbol{\phi}$  を用いて、式 (21) で表される。ここで、 $i$  はアインシュタイン記約におけるダミーインデックスである。

$$\begin{aligned} \phi^{(e)}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\phi} \\ &= N_i(\boldsymbol{\xi}) \phi_i \end{aligned} \quad (21)$$

以上の定義から、式 (17) は、式 (22) のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} (N_i \delta\theta_i)^t \rho c N_j \dot{\theta}_j \, d\Omega^{(e)} + \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla N_i \delta\theta_i)^t \lambda \nabla N_j \theta_j \, d\Omega^{(e)} = \\ \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} (N_i \delta\theta_i)^t f_i \, d\Omega^{(e)} + \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Gamma^{(e)}} (N_i \delta\theta_i)^t q_i \, d\Gamma^{(e)} \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、式 (22) から  $\delta\theta_i^t$  をくくりだして、式 (23) を得る。

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\theta}^t \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} N_i^t \rho c N_j \dot{\theta}_j \, d\Omega^{(e)} + \delta\boldsymbol{\theta}^t \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla N_i)^t \lambda \nabla N_j \theta_j \, d\Omega^{(e)} = \\ \delta\boldsymbol{\theta}^t \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} N_i^t f_i \, d\Omega^{(e)} + \delta\boldsymbol{\theta}^t \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Gamma^{(e)}} N_i^t q_i \, d\Gamma^{(e)} \end{aligned} \quad (23)$$

式 (23) は任意の  $\delta\theta^t$  について成り立つので、式 (24) を得る。

$$\begin{aligned} \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} N_i^t \rho c N_j \dot{\theta}_j \, d\Omega^{(e)} + \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla N_i)^t \lambda \nabla N_j \theta_j \, d\Omega^{(e)} = \\ \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} N_i^t f_i \, d\Omega^{(e)} + \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Gamma^{(e)}} N_i^t q_i \, d\Gamma^{(e)} \end{aligned} \quad (24)$$

式 (24) の左辺を整理して、式 (25) を得る。

$$\begin{aligned} \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} N_i^t \rho c N_j \, d\Omega^{(e)} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla N_i)^t \lambda \nabla N_j \, d\Omega^{(e)} \boldsymbol{\theta} = \\ \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} N_i^t f_i \, d\Omega^{(e)} + \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Gamma^{(e)}} N_i^t q_i \, d\Gamma^{(e)} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、式 (26)、式 (27)、式 (28) を以下のように定義する。

$$\mathbf{M} = \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} N_i^t \rho c N_j \, d\Omega^{(e)} \quad (26)$$

$$\mathbf{K} = \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla N_i)^t \lambda \nabla N_j \, d\Omega^{(e)} \quad (27)$$

$$\mathbf{f} = \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} N_i^t f_i \, d\Omega^{(e)} + \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Gamma^{(e)}} N_i^t q_i \, d\Gamma^{(e)} \quad (28)$$

式 (25)、式 (26)、式 (27)、式 (28) より、有限要素離散化による支配方程式 (29) を得る。

$$\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{f} \quad (29)$$

## 4 時間離散化

支配方程式の時間離散化を行う。式 (29) は、非定常方程式であり、時刻に関して一般化 Crank-Nicolson 法による離散化を考える。式 (30) に、時刻  $t + \Delta t$  における支配方程式 (29) を示す。

$$\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{t+\Delta t} \quad (30)$$

時刻  $t + \Delta t$  における温度  $\theta_{t+\Delta t}$  を式 (31) で表す。ここで、 $\alpha$  は、 $0 \leq \alpha \leq 1$  の値をとる。

$$\theta_{t+\Delta t} = \alpha \theta_{t+\Delta t} + (1 - \alpha) \theta_t \quad (31)$$

同様に、時刻  $t + \Delta t$  における外力  $f_{t+\Delta t}$  を式 (32) で表す。

$$f_{t+\Delta t} = \alpha f_{t+\Delta t} + (1 - \alpha) f_t \quad (32)$$

さらに、時刻  $t + \Delta t$  における温度  $\theta$  の時間時間変化率  $\dot{\theta}_{t+\Delta t} = \frac{\partial \theta_{t+\Delta t}}{\partial t}$  は、式 (33) で近似する。

$$\dot{\theta}_{t+\Delta t} = \frac{\partial \theta_{t+\Delta t}}{\partial t} = \frac{\theta_{t+\Delta t} - \theta_t}{\Delta t} \quad (33)$$

式 (31)、式 (32)、式 (33) の関係から、支配方程式 (29) は、式 (34) のように書き換える。

$$M \frac{\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\theta}_t}{\Delta t} + \mathbf{K} \{ \alpha \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t} + (1 - \alpha) \boldsymbol{\theta}_t \} = \alpha \mathbf{f}_{t+\Delta t} + (1 - \alpha) \mathbf{f}_t \quad (34)$$

式 (34) は、式 (35) のように書く場合もある。

$$M \frac{\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\theta}_t}{\Delta t} + \mathbf{K} \boldsymbol{\theta}_{t+\alpha\Delta t} = \mathbf{f}_{t+\alpha\Delta t} \quad (35)$$

このとき、 $\alpha = 0$  では Forward Euler 法、 $\alpha = \frac{1}{2}$  では Crank-Nicolson 法、 $\alpha = 1$  では Backward Euler 法なることが確認できる。特に、Forward Euler 法の場合、行列  $M$  を集中化し対角行列とみなすことで、行列の求解の必要なく、次の時刻の温度を求めることができる。Backward Euler 法の場合、行列求解が必要であるが、時間刻み幅  $\Delta t$  によらず、安定に解くことができる。Crank-Nicolson 法の場合、1 次の中心差分とみなせるため、時間方向の誤差を  $O(\Delta t^2)$  に抑えることができる。その他の場合、時間方向の誤差は  $O(\Delta t)$  である。

Crank-Nicolson 法を用いた場合、 $\alpha = \frac{1}{2}$  として式 (34) を整理し書き下せば、式 (36) を得る。

$$\left( \frac{1}{\Delta t} M + \frac{1}{2} \mathbf{K} \right) \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t} = \frac{1}{2} (\mathbf{f}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_t) + \left( \frac{1}{\Delta t} M - \frac{1}{2} \mathbf{K} \right) \boldsymbol{\theta}_t \quad (36)$$

## 5 非線形解法

### 5.1 逐次代入法

支配方程式の非線形解法について考える。式 (35) は、非線形方程式であるため、何らかの非線形解法を利用する。FrontISTR では、逐次代入法が利用されている。式 (35) から、逐次代入法により解くべき式は、式 (37) で表される。

$$\frac{1}{\Delta t} M(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i-1)}) \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\alpha\Delta t}^{(i-1)}) \boldsymbol{\theta}_{t+\alpha\Delta t}^{(i)} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_{t+\alpha\Delta t}^{(i-1)}) + \frac{1}{\Delta t} M(\boldsymbol{\theta}_t) \boldsymbol{\theta}_t \quad (37)$$

式 (37) において、 $\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i-1)}$  を入力し、 $\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}$  を得ることを、 $\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} = G(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i-1)})$  と書くとする。この時、式 (38) のように、順に得られた解ベクトルの差が十分小さくなったとき、解くべき方程式の解が得られたと判定する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(1)} &= G(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(0)}) \\ \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(2)} &= G(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(1)}) \\ \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(3)} &= G(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(2)}) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (38)$$

## 5.2 Newton-Raphson 法

式 (35) に対し、Newton-Raphson 法を利用する。残差  $\varphi(\boldsymbol{\theta})$  を式 (39) に示す。簡単のため、 $\alpha = \frac{1}{2}$  として書き下した。

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}) &= \left\{ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}) + \frac{1}{2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}) \right\} \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t} \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_t) + \frac{1}{2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_t) \right\} \boldsymbol{\theta}_t - \frac{1}{2} \{ \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}) + \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_t) \} \\ &= 0\end{aligned}\tag{39}$$

ここで、温度  $\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}$  を式 (40) のように近似し、解を反復的に修正することを考える。

$$\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i+1)} = \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} + \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}\tag{40}$$

式 (40) を式 (39) に代入し、式 (41) を得る。

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}) &= \left\{ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}) + \frac{1}{2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}) \right\} \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}) + \frac{1}{2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}) \right\} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_t) + \frac{1}{2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_t) \right\} \boldsymbol{\theta}_t - \frac{1}{2} \{ \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}) + \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_t) \} \\ &= 0\end{aligned}\tag{41}$$

次に、テイラー展開により、係数行列  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t})$ 、係数行列  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t})$ 、右辺ベクトル  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t})$  を、それぞれ式 (42)、式 (43)、式 (44) で近似する。

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i+1)}) \simeq \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) + \frac{\partial \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}\tag{42}$$

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i+1)}) \simeq \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) + \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}\tag{43}$$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i+1)}) \simeq \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}\tag{44}$$

式 (40)、式 (42)、式 (43)、式 (44) を式 (41) に代入して、式 (45) を得る。

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}) &= \left\{ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) + \frac{\partial \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \right\} \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \\
&+ \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) + \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \right\} \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \\
&+ \left\{ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) + \frac{\partial \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \right\} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \\
&+ \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) + \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \right\} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \\
&+ \left\{ -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_t) + \frac{1}{2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_t) \right\} \boldsymbol{\theta}_t \\
&- \frac{1}{2} \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} - \frac{1}{2} \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_t) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{45}$$

ここで、 $\Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}$  の二次の項は無視して、式 (46) を得る。

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}) &= \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} + \frac{\partial \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \\
&+ \frac{1}{2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} + \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \\
&+ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} + \frac{1}{2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \\
&- \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_t) \boldsymbol{\theta}_t + \frac{1}{2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_t) \boldsymbol{\theta}_t - \frac{1}{2} \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} - \frac{1}{2} \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_t) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{46}$$

式 (46) において、接線剛性行列を式 (47)、式 (48)、式 (49) のように定義する。

$$\mathbf{M}_T(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) = \frac{\partial \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \tag{47}$$

$$\mathbf{K}_T(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) = \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \tag{48}$$

$$\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \tag{49}$$

式 (46)、式 (47)、式 (48)、式 (49) より、式 (50) を得る。

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) + \mathbf{M}_T(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) + \frac{1}{2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) + \mathbf{K}_T(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) + \mathbf{F}_T(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) \right\} \Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} \\
&= \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_t) \boldsymbol{\theta}_t + \frac{1}{2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} + \frac{1}{2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_t) \boldsymbol{\theta}_t \\
&- \frac{1}{2} \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}) - \frac{1}{2} \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_t)
\end{aligned} \tag{50}$$

ここで、係数行列が線形の場合、接線剛性行列を示す式 (47)、式 (48)、式 (49) は零になるので、式 (50) が成り立つように、 $\Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)}$  も零に近づく。 $\Delta \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}^{(i)} = 0$  の場合、式 (36) と一致する。

### 5.3 接線剛性行列の作成

接線剛性行列は、式 (51)、式 (52) のように定義する。外力項の接線剛性行列については、輻射伝熱が該当するが、ここでは割愛する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\theta} &= \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} N_i^t \frac{\partial \rho(\theta_k)}{\partial \theta} c N_j \theta_k \, d\Omega^{(e)} \\ &+ \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} N_i^t \rho \frac{\partial c(\theta_k)}{\partial \theta} N_j \theta_k \, d\Omega^{(e)} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\theta} = \bigoplus_e^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla N_i)^t \frac{\partial \lambda(\theta_k)}{\partial \theta} \nabla N_j \theta_k \, d\Omega^{(e)} \quad (52)$$

### 参考文献

- [1] Klaus-Jürgen Bathe, Mohammad R. Khoshgoftaar. Finite element formulation and solution of nonlinear heat transfer. *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 51, No. 3, pp. 389 – 401, 1979.
- [2] E.L. Wilson, K.J. Bathe, and F.E. Peterson. Finite element analysis of linear and nonlinear heat transfer. *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 29, No. 1, pp. 110 – 124, 1974. Special Issue: Papers Presented at the Conference Contents.
- [3] G. AGUIRRE-RAMIREZ, J. T. ODEN. Finite element technique applied to heat conduction in solids with temperature dependent thermal conductivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 7, No. 3, pp. 345–355.
- [4] NN Kochina. On a solution of the nonlinear diffusion equation. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 28, No. 4, pp. 857–866, 1964.
- [5] A Serdar Selamet and B Murat Uzun. A novel and efficient finite element software for heat transfer: Feheat.
- [6] Micheal W Glass, Roy E Hogan Jr, and David K Gartling. Coyote: a finite element computer program for nonlinear heat conduction problems. part i, theoretical background. Technical report, Sandia National Laboratories, 2010.
- [7] G Comini, S Del Giudice, RW Lewis, and OC Zienkiewicz. Finite element solution of non-linear heat conduction problems with special reference to phase change. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, No. 3, pp. 613–624, 1974.
- [8] L de F French. *Transient nonlinear heat transfer analysis using the finite element method in the context of the requirements of thermal analysis in a mine*. PhD thesis, University of Cape Town, 1990.